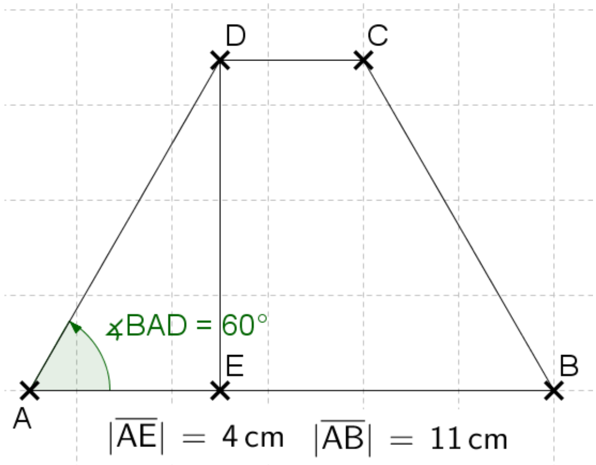
# Abschlussprüfung 2023
# an den Realschulen in Bayern
## Mathematik II Lehrplan+ Haupttermin
## Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 16.12.2025

Aufgabe A1 - ohne Taschenrechner




Für den Flächeninhalt brauchen wir: $|\overline{ED}|$ und $|\overline{DC}|$

Dreieck AED:

$$\tan \sphericalangle BAD = \frac{|\overline{ED}|}{|\overline{AE}|} =$$

$$\Leftrightarrow |\overline{ED}| = \tan \sphericalangle BAD \cdot |\overline{AE}| \quad \text{Formelsammlung!}$$

$$\Leftrightarrow |\overline{ED}| = \tan 60° \cdot 4\text{ cm} = \sqrt{3} \cdot 4\text{ cm} = 4\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$|\overline{DC}| = |\overline{AB}| - 2 \cdot |\overline{AE}| \quad \text{(gleichschenkliges Trapez!)}$$

$$\Leftrightarrow |\overline{DC}| = 11\text{ cm} - 2 \cdot 4\text{ cm} = 3\text{ cm}$$

Also: $A = 0{,}5 \cdot (11\text{ cm} + 3\text{ cm}) \cdot 4\sqrt{3}\text{ cm}$

$\Leftrightarrow A = 7\text{ cm} \cdot 4\sqrt{3}\text{ cm} = 28\sqrt{3}\text{ cm}^2$

Aufgabe A2 - ohne Taschenrechner

A 2.1

$y = -0{,}5x^2 + bx + c$ und $S(-2|1{,}5)$.

Scheitelpunktsform mit $a = -0{,}5$ und S:

$y = -0{,}5(x - (-2))^2 + 1{,}5$

$\Leftrightarrow y = -0{,}5(x + 2)^2 + 1{,}5$

A 2.2

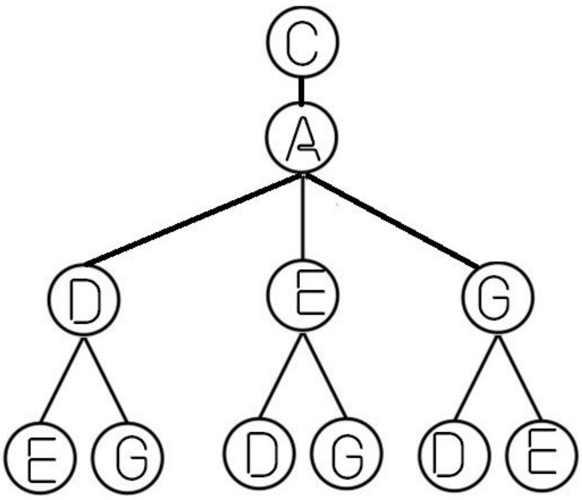
Die Parabel hat durch $a = -0{,}5$ ein Maximum, ist also nach unten geöffnet. Daher fallen a) und c) direkt raus, da die Wertemenge ein „kleiner gleich" braucht. Die -2 bezieht sich auf den x-Wert des Scheitelpunkts, wir brauchen aber den y-Wert 1,5, so dass die Antwort d) $\{y|y \leq 1{,}5\}$ stimmt!

Aufgabe A3 – ohne Taschenrechner
A 3.1
Es gibt pro Anschlag immer 5 Möglichkeiten (mit zurücklegen, man kann also Tasten mehrfach verwenden), so dass wir für 4 Anschläge rechnen:
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ bzw. $5^4 = 625$

A 3.2
ACDC kann genau 1 mal angeschlagen werden, so dass genau 1 der 625 Möglichkeiten passt: $\frac{1}{625}$ (= 0,16 %)

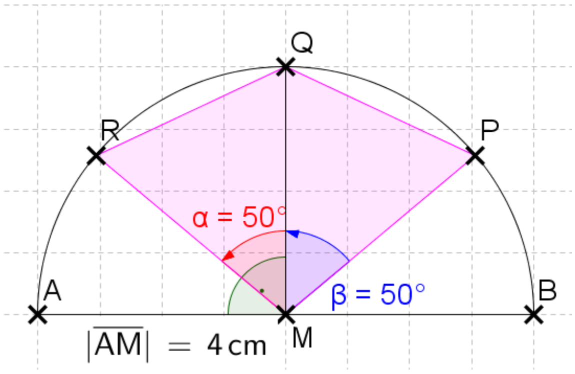
A 3.3
Hier gibt es genau 5 Treffer: CCCC DDDD EEEE GGGG AAAA
Also: $\frac{5}{625}$ (= 0,80 %)

A 3.4



Aufgabe B1 - mit Taschenrechner

B 1.1




B 1.2

$|\overline{MR}| = |\overline{MP}| = |\overline{AM}| = 4\ cm$

Fehlen also nur noch die gleich langen Streckenlängen von $\overline{PQ}$ und $\overline{RQ}$:

Kosinussatz im Dreieck MQR:

$$|\overline{RQ}|^2 = |\overline{MR}|^2 + |\overline{MQ}|^2 - 2 \cdot |\overline{MR}| \cdot |\overline{MQ}| \cdot \cos 50°$$

$$\Leftrightarrow |\overline{RQ}|^2 = (4\ cm)^2 + (4\ cm)^2 - 2 \cdot 4\ cm \cdot 4\ cm \cdot \cos 50°$$

$$\Leftrightarrow |\overline{RQ}|^2 = 11{,}43\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{RQ}| = 3{,}38\ cm$$

$u = 2 \cdot 4\ cm + 2 \cdot 3{,}38\ cm = 14{,}76\ cm$

B 1.3

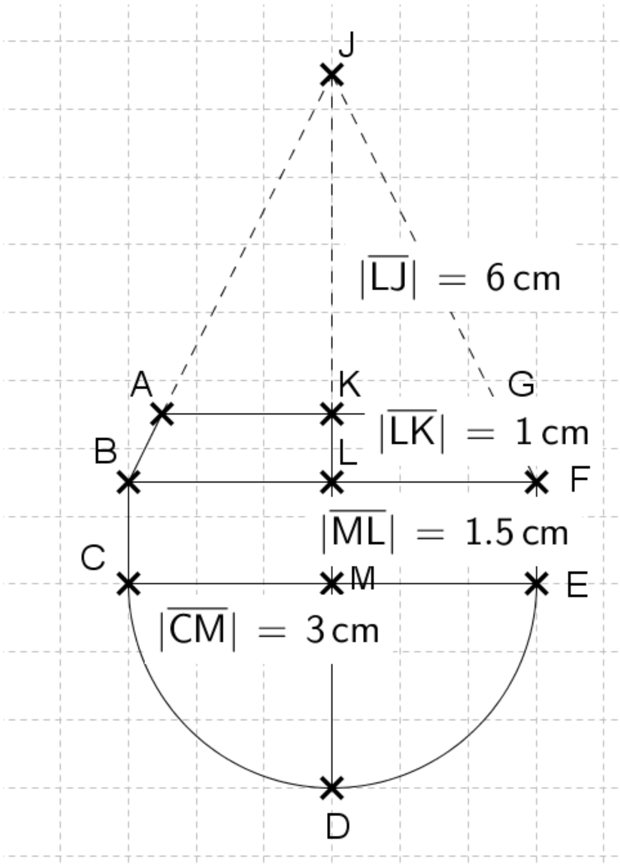
$$u_{Gesamtfigur} = |\overline{AB}| + 0{,}5 \cdot 2 \cdot |\overline{AM}| \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow u_{Gesamtfigur} = 8\ cm + 0{,}5 \cdot 2 \cdot 4\ cm \cdot \pi =$$

$$\Leftrightarrow u_{Gesamtfigur} = 8\ cm + 12{,}56\ cm = 20{,}57\ cm$$

$$\frac{14{,}76\ cm \cdot 100\ \%}{20{,}57\ cm} = 71{,}75\ \%$$

Aufgabe B2 - mit Taschenrechner




Wir brauchen am Ende die 3 Abschnitte unten und müssen den Kegel oben für den Kegelstumpf abziehen.

Vierstreckensatz im Bereich BFJ:

$$\frac{|\overline{AK}|}{|\overline{BL}|} = \frac{|\overline{JK}|}{|\overline{JL}|}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{AK}| = \frac{|\overline{JK}| \cdot |\overline{BL}|}{|\overline{JL}|}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{AK}| = \frac{(6 - 1)\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}}{6\text{ cm}} = 2{,}5\text{ cm}$$

Wir machen das mal einzeln, sonst wird's vielleicht zu unübersichtlich ;-)

$$V_{HalbkugelCDE} = 0{,}5 \cdot \frac{4}{3} \cdot (3\text{ cm})^3 \cdot \pi = 56{,}55\text{ cm}^3$$

$$V_{ZylinderCEFB} = (3\text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 1{,}5\text{ cm} = 42{,}41\text{ cm}^3$$

$$V_{KegelstumpfBFGA} = \left(\frac{1}{3}\cdot 3^2 \cdot 6 \cdot \pi - \frac{1}{3}\cdot 2{,}5^2 \cdot 5 \cdot \pi\right)\text{ cm}^3$$

$$= 56{,}55\text{ cm}^3 - 32{,}72\text{ cm}^3 = 23{,}83\text{ cm}^3$$

Damit damit: $V = (56{,}55 + 42{,}41 + 23{,}83)\text{ cm}^3 = 122{,}79\text{ cm}^3$

Aufgabe B3 – mit Taschenrechner
B 3.1 und B 3.2

P(6|6), Q(8|3) und a = -0,25 sowie **g: $y = \frac{1}{5}x - 1$**

Also ab ins Gleichungssystem:

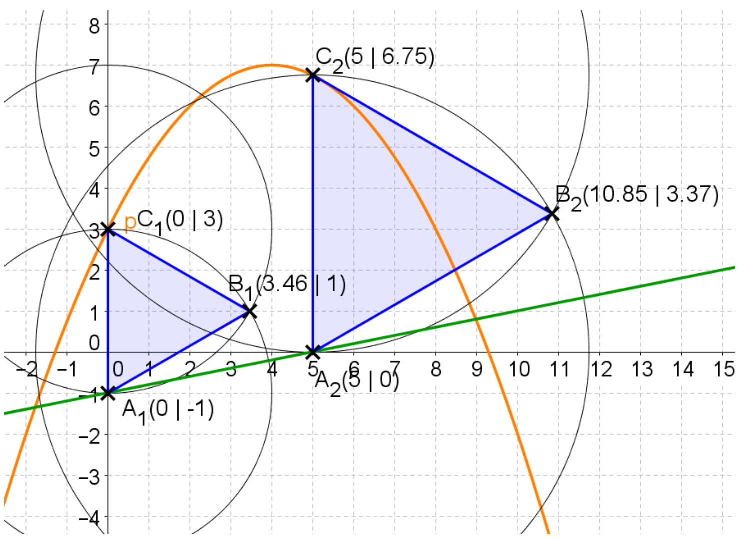
I $6 = -0{,}25 \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c$
II $3 = -0{,}25 \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c$

I $6 = -9 + 6b + c$
$c = 15 - 6b$
II $3 = -16 + 8b + c$
$c = 19 - 8b$

I = II $15 - 6b = 19 - 8b$
$2b = 4$
$b = 2$ b in I
$c = 15 - 6 \cdot 2 = 3$

Damit ist **p: $y = -0{,}25x^2 + 2x + 3$**

Wichtige Info aus der Angabe: Die Dreiecke sind gleichseitig, so können wir überhaupt erst die Punkte $B_n$ zeichnen … und wir merken uns schon mal, dass alle Innenwinkel jeweils das Maß 60° haben! Ich habe die Konstrunktionskreise in der Zeichnung dringelassen falls es unklar ist, wie man auf die Punkte $B_n$ kommt!



B 3.3

Ein Klassiker: Die Dreiecke existieren nur zwischen den Schnittpunkten von p und g, also gleichsetzen und ab in die Lösungsformel!

$$-0{,}25x^2 + 2x + 3 = 0{,}2x - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -0{,}25x^2 + 1{,}8x + 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1{,}8 \pm \sqrt{1{,}8^2 - 4 \cdot (-0{,}25) \cdot 4}}{2 \cdot (-0{,}25)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-1{,}8 \pm \sqrt{7{,}24}}{-0{,}5}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -1{,}78 \wedge x_2 = 8{,}98 \quad \mathbb{L} = \{-1{,}78;\ 8{,}98\}$$

Damit muss gelten: $-1{,}78 < x < 8{,}98$

B 3.4

$$|\overline{A_nC_n}|^2 = \sqrt{(x - x)^2 + (-0{,}25x^2 + 2x + 3 - (0{,}2x - 1))^2}\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{A_nC_n}|^2 = \sqrt{(-0{,}25x^2 + 1{,}8x + 4)^2}\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{A_nC_n}| = (-0{,}25x^2 + 1{,}8x + 4)\ \text{cm}$$

B 3.5

Quadratische Ergänzung:

$$T(x) = -0{,}25(x^2 - 7{,}2x) + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad T(x) = -0{,}25(x^2 - 7{,}2x + 3{,}6^2 - 3{,}6^2) + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad T(x) = -0{,}25[(x - 3{,}6)^2 - 12{,}96] + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad T(x) = -0{,}25(x - 3{,}6)^2 + 7{,}24$$

Damit ist die maximale Streckenlänge 7,24 cm für $x = 3{,}6$

$$A_{max} = 0{,}5 \cdot \sin 60° \cdot 7{,}24\ \text{cm} \cdot 7{,}24\ \text{cm} = 22{,}70\ \text{cm}^2$$

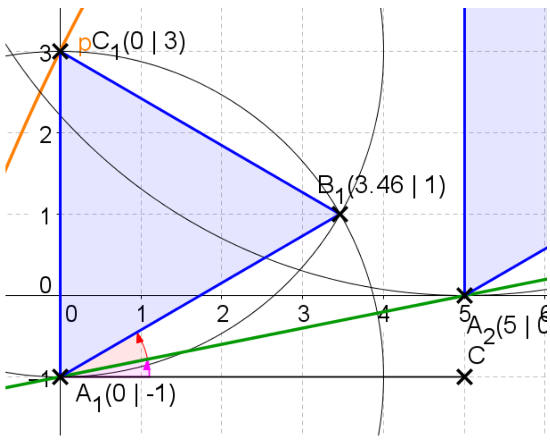
B 3.6

Der gesuchte Winkel ist hier mal in rot eingezeichnet. Wir arbeiten mit der Steigung der Geraden (tan für pinken Winkel!) und dem 60°-Winkel, wie oben schon angedeutet ☺

$$\tan \sphericalangle PINK = 0{,}2$$

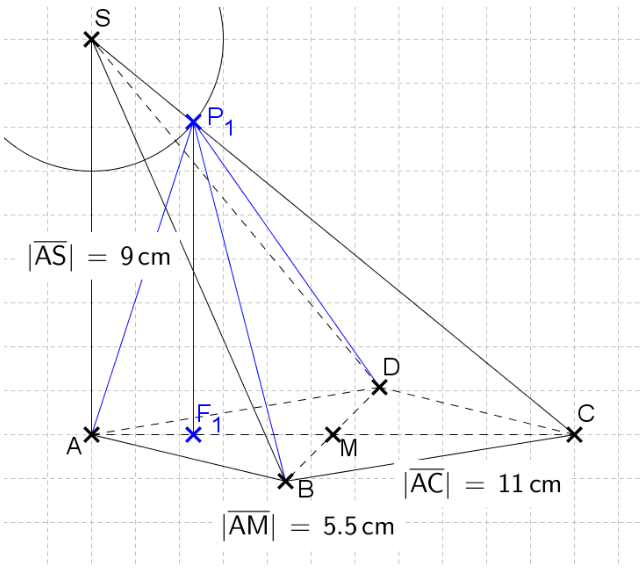
$$\Rightarrow \quad \sphericalangle PINK = 11{,}31°$$

$$\sphericalangle ROT = 90° - 60° - 11{,}31° = 18{,}69°$$



Aufgabe B4 – mit Taschenrechner

B 4.1




Pythagoras im Dreieck ACS:

$$|\overline{CS}|^2 = |\overline{AS}|^2 + |\overline{AC}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{CS}|^2 = (9\ \text{cm})^2 + (11\ \text{cm})^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{CS}|^2 = 202\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{CS}| = 14{,}21\ \text{cm}$$

Tangens im gleichen Dreieck:

$$\tan \sphericalangle SCA = \frac{|\overline{AS}|}{|\overline{AC}|} = \frac{9\ \text{cm}}{11\ \text{cm}} = 0{,}82 \quad \Rightarrow \sphericalangle SCA = 39{,}29°$$

B 4.2

Dreieck $ACP_1$: MZG

$$|\overline{AP_1}|^2 = |\overline{AC}|^2 + |\overline{CP_1}|^2 - 2 \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{CP_1}| \cdot \cos 39{,}29°$$

$$\Leftrightarrow |\overline{AP_1}|^2 = (11)^2 + (14{,}21 - 3)^2 - 2 \cdot 11 \cdot (14{,}21 - 3) \cdot \cos 39{,}29°$$

$$\Leftrightarrow |\overline{AP_1}|^2 = 55{,}79$$

$$\Leftrightarrow |\overline{AP_1}| = 7{,}47 \quad \text{Also: } |\overline{AP_1}| = 7{,}47\ \text{cm}$$

Und gleich noch ein Kosinussatz, diesmal im Dreieck $AP_1S$:

$$|\overline{AS}|^2 = |\overline{AP_1}|^2 + |\overline{SP_1}|^2 - 2 \cdot |\overline{AP_1}| \cdot |\overline{SP_1}| \cdot \cos \sphericalangle SP_1A$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle SP_1A = \frac{|\overline{AS}|^2 - |\overline{AP_1}|^2 - |\overline{SP_1}|^2}{-2 \cdot |\overline{AP_1}| \cdot |\overline{SP_1}|}$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle SP_1A = \frac{(9\ \text{cm})^2 - (7{,}47\ \text{cm})^2 - (3\ \text{cm})^2}{-2 \cdot 7{,}47\ \text{cm} \cdot 3\ \text{cm}} = -0{,}36$$

$$\Rightarrow \sphericalangle SP_1A = 111{,}19°$$

Oder mit dem Sinussatz:

$$\sphericalangle ASP_1 = 180° - 90° - 39{,}29° = 50{,}71°$$

$$\frac{\sin \sphericalangle SP_1A}{|\overline{AS}|} = \frac{\sin \sphericalangle ASP_1}{|\overline{AP_1}|}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle SP_1A = \frac{\sin \sphericalangle ASP_1 \cdot |\overline{AS}|}{|\overline{AP_1}|}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle SP_1A = \frac{\sin 50{,}71° \cdot 9 \text{ cm}}{7{,}47 \text{ cm}} = 0{,}93$$

($\Rightarrow \sphericalangle SP_1A = 68{,}82°$)

Anhand der Zeichnung klar zu erkennen: Wir brauchen den 2. Winkel vom Sinussatz, da der gesuchte Winkel größer als 90° ist. Also: $\Rightarrow \sphericalangle SP_1A = 180° - 68{,}82° = 111{,}18°$

B 4.3

Vierstreckensatz im Bereich ACS: MZG

$$\frac{|\overline{F_nP_n}|}{|\overline{AS}|} = \frac{|\overline{CP_n}|}{|\overline{CS}|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\overline{F_nP_n}|}{9} = \frac{(14{,}21 - x)}{14{,}21}$$

$$\Leftrightarrow |\overline{F_nP_n}| = \frac{(14{,}21 - x) \cdot 9}{14{,}21} = 9 - 0{,}63x$$

Also: $|\overline{F_nP_n}| = (9 - 0{,}63x)$ cm

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot |\overline{BD}| \cdot |\overline{AM}| \cdot |\overline{F_nP_n}|$$

$$\Leftrightarrow V(x) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot 6 \text{ cm} \cdot 5{,}5 \text{ cm} \cdot (9 - 0{,}63x) \text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow V(x) = (49{,}5 - 3{,}47x) \text{ cm}^3$$

B 4.4

$$V_{gesamt} = \frac{1}{3} \cdot |\overline{BD}| \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{AS}|$$

$$\Leftrightarrow V_{gesamt} = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot 6 \text{ cm} \cdot 11 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm} = 99 \text{ cm}^3$$

80 % kleiner bedeutet: Es sind 20 % ☺

Also: $99 \text{ cm}^3 \cdot 0{,}2 = 19{,}80$ cm

$$-3{,}47x + 49{,}5 = 19{,}80$$

$$\Leftrightarrow -3{,}47x = -29{,}70$$

$$\Leftrightarrow x = 8{,}56 \quad L=\{8{,}56\}$$

B 4.5

Für das größte Volumen muss gelten: x = 0, da so die Höhe die maximale Länge von 9 cm erreicht. Da die Grundfläche immer gleich bleibt können wir feststellen:

Die Grundfläche ABD ist halb so groß wie die Originalgrundfläche ABCD, und damit ist bei gleicher Höhe das Volumen halb so groß.